## 2.1.7 Prostá funkce

Pozor je tam přidaný příklad 4.

**Předpoklady:** 2103,

**Pedagogická poznámka:** Doba nutná k probrání této hodiny hodně závisí na tom, do jaké míry necháte studenty pracovat samostatně při řešení příkladu 2. Pokud jim řešení prozradíte sami, zvládnete hodinu za deset minut a můžete ji přilepit k jiné. Já osobně věnuji prvnímu příkladu tak 5 minut (studenti si v naprosté většině případů musí najít definici prostého zobrazení v sešitě a pak jsou překvapeni, jak málo toho musí změnit). Druhý příklad pomocí různého postrkávání trvá tak deset minut, grafy roztřídíme za 5. Pro zbytek hodiny je několik možností. Kromě příkladu 4 (popsán níže) je možné psát písemku, nebo počítat sbírku.
Pokud počítáme sbírku, většinu studentů nechám pracovat samostatně, s menšinou, která se špatně orientuje v grafech, společně řešíme příklady, které by jejich orientaci měly zlepšit.

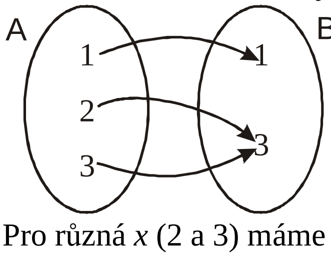
Každá funkce je zobrazení (funkce je speciální druh zobrazení), pokud splňuje podmínky pro prosté zobrazení, říkáme jí **prostá funkce**.

**Př. 1:** Sestav definici prosté funkce. Nejdříve se pokus definici sestavit bez pomoci definice prostého zobrazení.

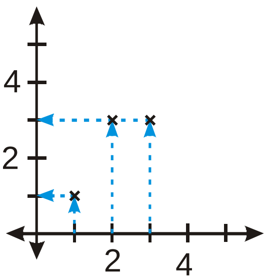
Prostá funkce:
Funkce *f* se nazývá prostá, právě když pro každá dvě $x_1; x_2 \in D(f)$ platí, je-li $x_1 \neq x_2$ pak i $y_1 \neq y_2$.

**Př. 2:** Stanov pravidlo, podle kterého půjde z grafu určit, zda se jedná o funkci prostou.

Zkusíme napodobit postup z minulé hodiny, kdy jsme hledali podmínku, kterou musí splňovat graf funkce.
Nakreslíme si množinový obrázek funkce, která není prostá.

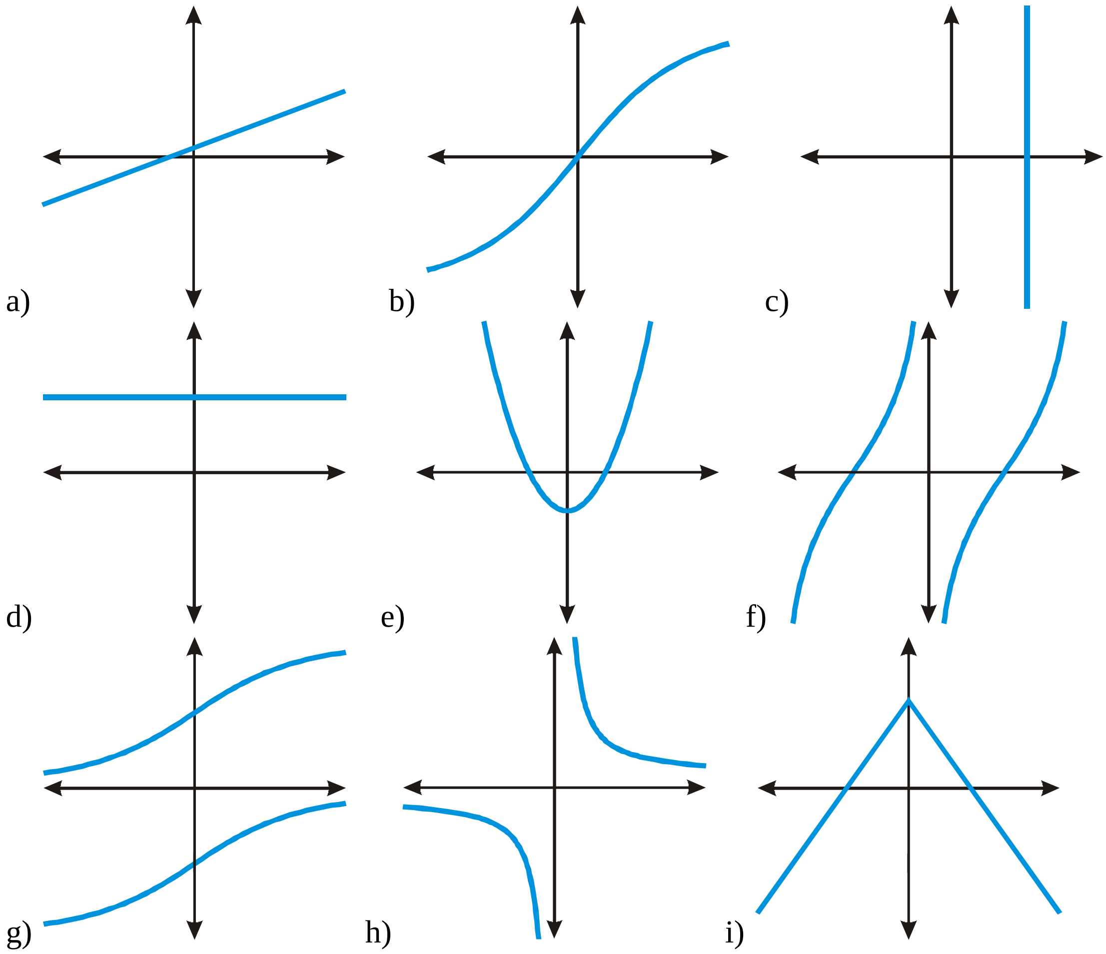



Pro různá *x* (2 a 3) máme stejné *y* (3). Nakreslíme si graf.




$\Rightarrow$ Funkce je prostá, právě když žádné dva body jejího grafu nejsou stejně vysoko ($\Rightarrow$ nemají stejnou hodnotu *y*)
$\Rightarrow$ Funkce je prostá, právě když jejím grafem prochází každá vodorovná čára maximálně jednou.

**Př. 3:** Urči, které z obrázků zachycují prosté funkce.




Prosté jsou funkce a), b), h). Na obrázcích c) a g) nejsou zobrazeny funkce.

**Pedagogická poznámka:** Obrázky relací jsou mezi funkce podstrčeny schválně. Část studentů zapomene, že kromě podmínky pro hodnoty na ose *y* musí graf splňovat i podmínky pro funkci a grafy c) a g) vyhodnotí jako prosté funkce.

**Př. 4:** Které z následujících vět jsou alternativními popisy prostých funkcí.
Funkce je prostá,
a) jestliže různým *x* náleží různá *y*.

b) jestliže pro každé $x \in D(f)$ existuje právě jedno $y \in H(f)$.

c) jestliže pro každé $y \in H(f)$ existuje právě jedno $x \in D(f)$.

a) Funkce je prostá, jestliže různým *x* náleží různá *y*.
Ano, jde o alternativní popis prosté funkce. V definici je $x_1 \neq x_2$ (tedy různá *x*) pak i $y_1 \neq y_2$ (různá *y*), tedy různým *x* náleží různá *y*.

b) Funkce je prostá, jestliže pro každé $x \in D(f)$ existuje právě jedno $y \in H(f)$.
Není to alternativní popis prosté funkce. Pro každé $x \in D(f)$ existuje právě jedno $y \in H(f)$, omezuje počet cest *x* (musí být pouze jedna), ale nic neříká o tom, kolik cest může končit u nějakého *y* (klidně jich může být víc z různých *x*). Jde o podmínku pro funkci.

c) Funkce je prostá, jestliže pro každé $y \in H(f)$ existuje právě jedno $x \in D(f)$.
Ano, jde o alternativní popis prosté funkce. Pro každé $y \in H(f)$ existuje právě jedno $x \in D(f)$ znamená, že každého *y* může končit jen jedna cesta z jednoho *x*, protože jde zároveň i o funkci (z jednoho *x* může vycházet jen jedna cesta), platí, že různým *x* náleží různá *y*.

**Pedagogická poznámka:** Následující příklady řešíme netypicky. Žáci pracují ve dvojicích, tabuli nepoužíváme. Oba spolusedící vyřeší bod 5 a) a pak si vymění sešity. Každý z nich pak v kontrolovaném příkladě určí definiční obor, obor hodnot, funkční hodnotu, o které se píše v zadání, a podle výsledku rozhodne, zda je příklad vyřešený správně. Pak si sešity vrátí, a buď opravují předchozí bod, nebo pokračují dále. Já pracuji s případným lichým žákem a kontroluji dvojice, kde je pravděpodobnost, že by případná chyba mohla zůstat neodhalena. Nedá se čekat, že by všichni žáci všechno stíhali, proto je po určité době posílám do dalšího příkladu.

**Pedagogická poznámka:** Nebudu tvrdit, že řešení není u následujících příkladů schválně. Není tam, protože jsem ho zatím nestihl dodělat a protože to nepovažuji u těchto příkladů za velký problém. Každý by měl v první řadě najít své vlastní řešení a ne se opičit po autorovi učebnice, proto řešení může chybět ještě dlouho.

**Př. 5:** Nakresli graf libovolné funkce, pro kterou najednou platí všechny podmínky:

a) $D(f) = R$, $f(3) = f(-1)$,

b) $D(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; 4 \rangle$, $f(-2) < f(1) < f(3)$,

c) $D(f) = \langle -3; -2 \rangle \cup (2; \infty)$, $f(x) > 0$, $f(-2) = 2$,

d) $D(f) = (-4; -1\rangle \cup \langle 3; 4 \rangle \cup \{0; 1\}$, funkce je prostá, $f(0) = -1$.

**Př. 6:** Nakresli graf libovolné funkce, pro kterou najednou platí všechny podmínky:

a) $H(f) = R$, $f(3) = f(-1)$,

b) $H(f) = (-5; -1) \cup \langle 0; 4 \rangle$, $f(-2) > f(1) > f(3)$,

c) $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 2; 5 \rangle$, $f(-2) = f(3)$,

d) $H(f) = (-3; -1\rangle \cup \langle 3; 4\rangle \cup \{0; 1\}$, funkce je prostá, $f(0) = -1$.

**Př. 7:** Nakresli graf libovolné funkce, pro kterou najednou platí všechny podmínky:

a) $D(f) = R$, $H(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 0; 4 \rangle$,

b) $D(f) = (-\infty; 2)$, $H(f) = R$ $f(-2) < f(1)$,

c) $D(f) = \langle -3; -1 \rangle \cup (2; \infty)$, $H(f) = (-\infty; 0) \cup \langle 2; 4)$, $f(-2) = 2$,

d) $D(f) = (-\infty; -1\rangle \cup \{0; 1\}$, $H(f) = R$, funkce je prostá, $f(0) = -1$.

**Př. 8:** Petáková:
strana 25/cvičení 22

**Shrnutí:** Prostá funkce musí pro různá *x* vytvářet různá *y* $\Rightarrow$ ze dvou různých čísel se nesmíme dostat ke stejnému cíli.